ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

ĐẶNG THỊ THU HÀ

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC ĐỀ THI OLYMPIC VỀ PHƯƠNG TRÌNH DIOPHANT

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2019

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

ĐẶNG THỊ THU HÀ

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC ĐỀ THI OLYMPIC VỀ PHƯƠNG TRÌNH DIOPHANT

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp

Mã số: 8 46 01 13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
GS.TSKH. Nguyễn Văn Mậu

THÁI NGUYÊN - 2019

Lời cảm ơn

Luận văn này được hoàn thành tại trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đối với GS.TSKH Nguyễn Văn Mậu (Trường ĐH Khoa học Tự nhiên, ĐHQGHN), thầy đã trực tiếp hướng dẫn tận tình và động viên tác giả trong suốt thời gian nghiên cứu vừa qua.

Xin chân thành cảm ơn tới các quý thầy, cô giáo đã trực tiếp giảng dạy lớp cao học Toán K11, các bạn học viên, và các bạn đồng nghiệp đã tạo điều kiện thuận lợi, động viên giúp đỡ tác giả trong quá trình học tập và nghiên cứu tại trường. Tác giả cũng xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới gia đình và người thân luôn khuyến khích động viên tác giả trong suốt quá trình học cao học và viết luận văn này.

Mặc dù có nhiều cố gắng nhưng luận văn khó tránh khỏi những thiếu sót và hạn chế. Tác giả mong nhận được những ý kiến đóng góp của các thầy cô và các bạn đọc để luận văn được hoàn thiện hơn.

Xin chân thành cảm ơn!

Thái Nguyên, tháng 11 năm 2019

Tác giả

Đặng Thị Thu Hà

Mục lục

Mở đầu

Trong các kì thi học sinh giỏi toán các cấp, Olympic Toán sinh viên, các bài toán liên quan tới phương trình Diophant (dạng tuyến tính và phi tuyến) thường xuyên được đề cập. Những dạng toán này thường được xem là thuộc loại khó vì phần kiến thức về phương trình Diophant tổng quát không nằm trong chương trình chính thức của giáo trình Số học và Đại số bậc trung học phổ thông.

Để đáp ứng nhu cầu bồi dưỡng giáo viên và bồi dưỡng học sinh giỏi về chuyên đề phương trình Diophant, tôi chọn đề tài luận văn "Một số phương pháp giải các đề thi Olympic về phương trình Diophant".

Tiếp theo, khảo sát một số lớp hệ phương trình Diophant liên quan.

Cấu trúc luận văn gồm 3 chương:

Chương 1. Các kiến thức bổ túc về số học và phương trình Diophant cơ bản.

Chương 2. Các phương pháp giải phương trình Diophant.

Chương 3. Các dạng toán liên quan đến hệ phương trình Diophant.

Tiếp theo, cuối các chương đều trình bày các bài tập áp dụng và giải các đề thi HSG quốc gia và Olympic liên quan.

Chương 1. Phương trình Diophant và hệ Diophant cơ bản

1.1 Phương trình Diophant tuyến tính

Ta nhắc lại thuật toán Euclid và liên phân số đã được trình bày tương đối chi tiết trong chương trình toán bậc THCS.

Định nghĩa 1.1. Số nguyên c được gọi là một ước số chung của hai số nguyên a và b (không đồng thời bằng không) nếu c chia hết a và c chia hết b (hay a và b đều chia hết cho c).

Định nghĩa 1.2 (xem [3,5, 7])**.** Một ước số chung d của hai số nguyên a và b (không đồng thời bằng không) được gọi là ước số chung lớn nhất của a và b nếu mọi ước số chung c của a và b đều là ước của d.

Nhận xét 1.1. Nếu d là ước số chung lớn nhất của a và b thì $-d$ cũng là ước số chung lớn nhất của a và b. Vì vậy, ta quy ước rằng ước số chung lớn nhất của a và b là số nguyên dương.

Ước số chung lớn nhất của hai số a và b được ký hiệu là (a, b) hay gcd(a,b) (greatest common divisor). Như vậy $d = (a, b)$ hay $d = \gcd(a, b)$.

Ví dụ 1.1. (25,30) = 5, (25,-72) = 1.

Định nghĩa 1.3 (xem [3,5,7])**.** Một số nguyên c được gọi là một ước số chung của bộ n số nguyên $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ (không đồng thời bằng không) nếu c là ước của mỗi số đó.

Định nghĩa 1.4 (xem [5,7])**.** Một ước số chung d của bộ n số nguyên $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ (không đồng thời bằng không) được gọi là ước số chung lớn nhất của $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ nếu mọi ước số chung c của $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ đều là ước của d.

Tương tự, ta cũng quy ước rằng ước số chung lớn nhất của n số nguyên $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ là số nguyên dương.

Ước số chung lớn nhất của $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ ký hiệu là

$$(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) \text{ hay } \gcd(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n).$$

Như vậy $d = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ hay $d = \gcd(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$.

Định lý 1.1 (Ước số chung lớn nhất của nhiều số)**.** Cho các số nguyên $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ không đồng thời bằng không. Khi đó tồn tại ước số chung lớn nhất của $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$.

Tính chất 1.1. Cho a, b, q, r là các số nguyên $(a^2 + b^2 \neq 0)$. Nếu $a = bq + r$ và $0 \leq r < |b|$ thì $(a, b) = (b, r)$.

1.1.1 Nghiệm riêng

Trong mục này, ta trình bày hai thuật toán tìm nghiệm riêng của phương trình Diophant, đó là thuật toán giản phân và thuật toán Euclid.

Xét phương trình Diophant tuyến tính

$$Ax + By = C. \tag{1.1}$$

Để tìm nghiệm riêng dựa vào giản phân, ta tiến hành thực hiện theo các bước như sau:

- Bước 1. Tìm $d = (A, B)$ để đưa phương trình (1.1) về phương trình (1.2) với $(a, b) = 1$. phương trình Diophant tuyến tính

$$ax + by = c. \tag{1.2}$$

- Bước 2. Viết $\dfrac{a}{|b|} = [a_0;\ a_1,\ a_2, \dots,\ a_n]$.

- Bước 3. Tính giản phân $C_{n-1} = [a_0;\ a_1,\ \dots,\ a_{n-1}] = \dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$. Suy ra p_{n-1} và q_{n-1}.

- Bước 4. Suy ra một nghiệm riêng (x_0, y_0) của phương trình (1.2).

Nếu $b > 0$ thì $\begin{cases} x_0 = (-1)^{n-1}.c.q_{n-1} \\ y_0 = (-1)^{n}.c.p_{n-1}. \end{cases}$

Nếu $b < 0$ thì $\begin{cases} x_0 = (-1)^{n-1}.c.q_{n-1} \\ y_0 = (-1)^{n-1}.c.p_{n-1}. \end{cases}$

Bài toán 1.1. Giải phương trình Diophant tuyến tính

$$342x - 123y = 15. \tag{1.3}$$

Lời giải. Phương trình đã cho tương đương với phương trình

$$114x - 41y = 5. \tag{1.4}$$

Ta có $\dfrac{114}{41} = [2;\ 1,\ 3, 1,\ 1,\ 4]$, với $n = 5$.

$$\begin{cases} C_4 = \dfrac{p_4}{q_4} = [2;\ 1,\ 3, 1,\ 1] = \dfrac{25}{9} \\ (p_4, q_4) = 1 \end{cases} \quad \text{nên} \quad \begin{cases} p_4 = 25 \\ q_4 = 9. \end{cases}$$

Do $b = -41 < 0$ nên một nghiệm riêng của (1.4) là

$$\begin{cases} x_0 = (-1)^{5-1}.5.9 \quad = \quad 45 \\ y_0 = (-1)^{5-1}.5.25 = 125. \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình (1.4), tức phương trình (1.14) là

$$\begin{cases} x = \quad 45 + \quad 41t \\ y = 125 + 114t \end{cases}, \ t \in \mathbb{Z}.$$

Để tìm nghiệm riêng dựa vào thuật toán Euclid, ta tiến hành thực hiện theo các bước như sau:

- Bước 1. Xác định $d = (|A|, |B|)$ theo thuật toán Euclid mở rộng.
- Bước 2. Biểu thị d như một tổ hợp tuyến tính của A và B, chẳng hạn

$$d = nA + mB \ \ (n, m \in \mathbb{Z}).$$

- Bước 3. Nhân hai vế đẳng thức trên với $\dfrac{C}{d}$ ta thu được

$$A\frac{Cn}{d} + B\frac{Cm}{d} = C.$$

- Bước 4. Suy ra một nghiệm riêng (x_0, y_0) của phương trình (1.1) là

$$\begin{cases} x_0 = \dfrac{Cn}{d} \\ \\ y_0 = \dfrac{Cm}{d}. \end{cases}$$

Bài toán 1.2. Giải phương trình Diophant tuyến tính

$$342x - 123y = 15. \tag{1.5}$$

Lời giải. Vì $(342, -123) = 3\,|15$ nên phương trình đã cho có nghiệm. Ta có

$$\begin{aligned}342 &= 123.2 + 96,\\ 123 &= 96.1 + 27,\\ 96 &= 27.3 + 15,\\ 27 &= 15.1 + 12,\\ 15 &= 12.1 + 3,\\ 12 &= 3.4 + 0.\end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned}3 &= 15 - 12.1 = 15 - (27 - 15.1).1 = 15.2 - 27.1\\ &= (96 - 27.3).2 - 27.1 = 96.2 - 27.7 = 96.2 - (123 - 96.1).7\\ &= 96.9 - 123.7 = (342 - 123.2).9 - 123.7 =\\ &= 342.9 - 123.25.\end{aligned}$$

Suy ra

$$342.45 - 123.125 = 15.$$

Từ đó, phương trình (1.14) có một nghiệm riêng là

$$(x_0; y_0) = (45; 125).$$

Suy ra nghiệm tổng quát của phương trình (1.14) là

$$\begin{cases} x = 45 + \dfrac{123}{3}t \\ \\ y = 125 + \dfrac{342}{3}t \end{cases}, \ t \in \mathbb{Z}$$

hay

$$\begin{cases} x = 45 + 41t \\ y = 125 + 114t \end{cases}, \ t \in \mathbb{Z}.$$

Định lý 1.2. Xét phương trình Diophant tuyến tính

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = c. \tag{1.6}$$

1. Phương trình (1.6) có nghiệm khi và chỉ khi $d = (a_1, a_2, \ldots, a_n)\,|c$.
2. Nếu phương trình (1.6) có nghiệm thì nó sẽ có vô số nghiệm.

Chứng minh.

1) $\Rightarrow$). Giả sử $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$ là một nghiệm của phương trình (1.6), tức là

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\overline{x}_i = c.$$

Ta có $d = (a_1,\, a_2, \ldots, a_n)$, suy ra $d \left| \sum\limits_{i=1}^{n} a_i\overline{x}_i \right.$, suy ra $d\,|c$.

$\Leftarrow$) Ta chứng minh khẳng định bằng phương pháp quy nạp theo n.
Với $n = 2$, khẳng định là đúng.
Giả sử khẳng định đúng với $n = k$ $(k \geq 2)$.
Với $n = k+1$, xét $d = (a_1,\, a_2, \ldots, a_{k+1})\,|c$, đặt $h = (a_1,\, a_2, \ldots, a_k)$. Khi đó, ta có

$$d = (h, a_{k+1})\,|c$$

Suy ra, tồn tại t, $\overline{x}_{k+1} \in \mathbb{Z}$ để

$$ht + a_{k+1}\overline{x}_{k+1} = c.$$

Vì $h\,|ht$ nên theo giả thiết quy nạp sẽ tồn tại $\overline{x}_1,\, \overline{x}_2, \ldots,\, \overline{x}_k \in \mathbb{Z}$ để

$$\sum_{i=1}^{k} a_i\overline{x}_i = ht.$$

Do đó

$$\sum_{i=1}^{k+1} a_i\overline{x}_i = c.$$

Vậy nên phương trình $a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_{k+1}x_{k+1} = c$ có nghiệm $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_{k+1})$.

2). Ta chứng minh khẳng định bằng phương pháp quy nạp theo n.
Với $n = 2$: khẳng định là đúng. Giả sử khẳng định đúng với $n = k$ $(k \geq 2)$, tức là phương trình $\sum\limits_{i=1}^{k} a_ix_i = c$ nếu có nghiệm thì sẽ có vô số nghiệm. Với $n = k+1$, ta sẽ chứng tỏ phương trình $\sum\limits_{i=1}^{k+1} a_ix_i = c$ nếu có nghiệm thì sẽ có vô số nghiệm.

Thật vậy, gọi $(t_1, t_2, \ldots, t_{k+1})$ là một nghiệm của phương trình $\sum\limits_{i=1}^{k+1} a_ix_i = c$, tức là

$$\sum_{i=1}^{k+1} a_it_i = c.$$